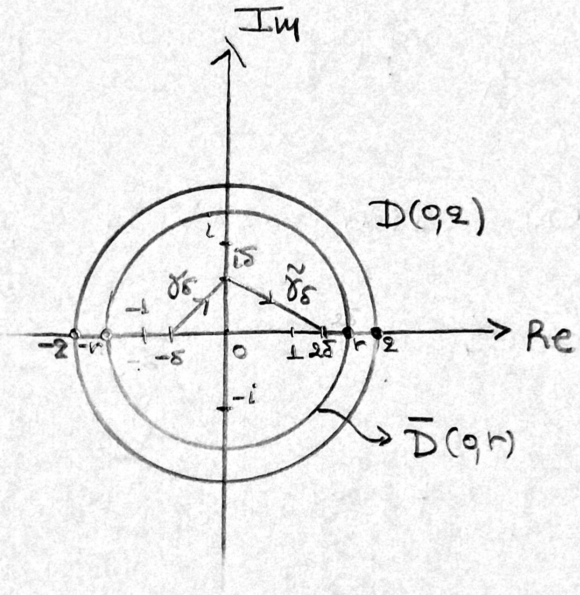
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.1 *Γιὰ κάθε $\delta > 0$ θεωροῦμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ_δ μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο $-\delta$ καὶ πέρας τὸ $i\delta$, καθῶς ἐπίσης καὶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ'_δ μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο $i\delta$ καὶ πέρας τὸ 2δ. Ἂν f εἶναι μιὰ μιγαδικὴ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ συνεχὴς στὸν δίσκο $D(0,2)$, θὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\gamma_\delta + \gamma'_\delta} f(z)dz = 0.$$

ΛΥΣΗ

Παραμετρικές Παραστάσεις:



$$\gamma_\delta = \gamma_\delta(t) = (-1+t+it)\cdot\delta$$

$$\tilde{\gamma}_\delta = \tilde{\gamma}_\delta(t) = (2+i(1-t))\cdot\delta$$

για $t \in [0,1]$

Αιτιολόγηση:

$$\gamma_\delta = \gamma_\delta(t) = At + B, \quad t \in [0,1]$$

Θέτω $\begin{cases} \gamma_\delta(0) = -\delta \\ \gamma_\delta(1) = i\delta \end{cases}$

Οπότε, $-\delta = A\cdot 0 + B \Rightarrow B = -\delta$ και

$i\delta = A\cdot 1 + B \Rightarrow A = \delta(1+i)$

Άρα, $\gamma_\delta(t) = \delta(1+i)t - \delta = (-1+t+it)\delta, \ t\in[0,1]$

Όμοια, και για τη $\tilde{\gamma}_\delta$

Επίσης, $\forall t \in [0,1]$:

$$|\gamma_\delta(t)| = |(-1+t+it)\delta| \leq |\mathrm{Im}(\gamma_\delta(t))| = \delta \underbrace{|t|}_{\leq 1} \leq \delta.$$

και

$$|\tilde{\gamma}_\delta(t)| = |(2t + i(1-t))\delta| \leq |\mathrm{Re}(\tilde{\gamma}_\delta(t))| = 2\delta \underbrace{|t|}_{\leq 1} \leq 2\delta.$$

Επιπλέον,

$$L(\gamma_\delta) = \int_0^1 |\gamma_\delta'(t)|\, dt = \int_0^1 |\delta(1+i)|\, dt$$

$$= \int_0^1 \delta\sqrt{2}\, dt = \delta\sqrt{2}.$$

και

$$L(\tilde{\gamma}_\delta) = \int_0^1 |\tilde{\gamma}_\delta'(t)|\, dt = \int_0^1 |\delta(2-i)|\, dt$$

$$= \int_0^1 \delta\sqrt{5}\, dt = \delta\sqrt{5}$$

Η f είναι συνεχής στο δίσκο $D(0,2)$ και άρα η f είναι συνεχής και σε κάθε $\overline{D}(0,r)$, όπου $0<r<2$. Όμως, $\overline{D}(0,r)$ συμπαγές $\subseteq \mathbb{C}$. Άρα, η συνάρτηση f έχει μια μέγιστη τιμή.

Δηλαδή, $\exists M>0 : |f(z)| \leq M = f(z_0)$, $\forall z \in \overline{D}(0,r)$. (η πιο απλά $\exists \|f\| =: M$)

Τότε, όμως $\forall\ \delta < \frac{r}{\sqrt{5}}$, ισχύει:

$$\left| \int_{\gamma_\delta \oplus \tilde{\gamma}_\delta} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_\delta} f(z)\,dz \right|$$

$$\leq \left| \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz \right| + \left| \int_{\tilde{\gamma}_\delta} f(z)\,dz \right|$$

$$\underset{(\gamma)}{\overset{\text{Πρτ. 11}}{\leq}} M \cdot L(\gamma_\delta) + M \cdot L(\tilde{\gamma}_\delta)$$

$$= M\delta(\sqrt{2}+\sqrt{5}).$$

Όταν $\delta \to 0$, τότε $M\delta(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \longrightarrow 0$ και έχουμε το ζητούμενο.